A Nom = Ramla / Med Salem.
Nom = Dimbra / Med Allaf.
Nom = Aïchetou / Moulaye oumar.
Groupe B2

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

$$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0 \text{ ; (On pose } Z=z+\frac{1}{z}\text{).}$$

* Correction exo 8 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$P(z) = 10z^4 - (39-3i)z^3 + 60z^2 - (39-3i)z + 10 = 0$

On définie par z^2 et on obtient :

$10z^2 - (39-3i)z + 60 - \frac{(39-3i)}{z} + \frac{10}{z^2} = 0$

$\Rightarrow 10\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (39-3i)\left(z+\frac{1}{z}\right) + 60 = 0$

or $z + \frac{1}{z} = Z \Rightarrow Z^2 = \left(\frac{1}{z}+z\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$

D'où l'équation devient :

$10(Z^2-2) - (39-3i)Z + 60 = 0 \Rightarrow 10Z^2 - 20 - (39-3i)Z + 60 = 0$

$10Z^2 - (39-3i)Z + 40 = 0$; $\Delta = -88 - 234i = (9-13i)^2$

$Z = \frac{39-3i+9-13i}{2\times 10} = \frac{48-16i}{20} = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$; $Z = \frac{39-3i-9+13i}{20} = \frac{30+10i}{20} =$
$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$ ⓐ $z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ ⓑ

Résolvons : ⓐ $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \frac{z^2+1}{z} = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow z^2+1 = \left(\frac{12}{5}-\frac{4}{5}i\right)z$

$\Rightarrow z^2 - \left(\frac{12}{5} - \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$

$\Delta = \frac{28}{25} - \frac{96}{25}i = \left(\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i\right)^2$; $z_1 = \frac{\frac{12}{5} - \frac{4}{5}i + \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i}{2} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}{2}$

$\boxed{z_1 = 2 - i}$

$z_2 = \frac{\frac{12}{5} - \frac{4}{5}i - \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i}$

fin!

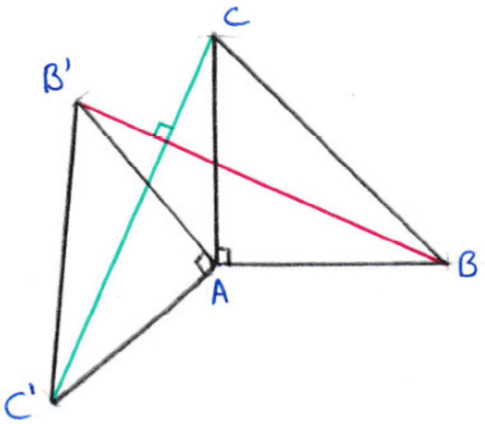
Exercice 14

Soient ABC et AB'C' deux triangles directs rectangles isocèles en A. Soient a, b, c, b', c' les affixes respectives des points A,B,C,B',C'.

1) Exprimer c et c' en fonction de a , b et b'.

2) Montrer que BB' = CC' et (BB') ⊥ (CC').

Solution d'Exercice 14 :



1) ABC rectangle isocèle direct : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$.

$c - a = i(b-a) = a + i(b-a)$.

$\Rightarrow \boxed{c = (ib + (1-i)a)}$.

$\dfrac{c'-a}{b'-a} = i \Rightarrow \boxed{c' = ib' + (1-i)a}$

2) $\dfrac{c'-c}{b'-b} = \dfrac{ib'(1-i)a - ib - (1-i)a}{b-b'} = \dfrac{ib' - ib}{b-b'} = i$.

$c - c' = i(b-b') \Leftrightarrow \dfrac{c-c'}{b-b'} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}) = \frac{\pi}{2}. \\ B'B = CC' \end{cases}$$

$$\boxed{BB' \perp CC' \quad \text{et} \quad CC' = B'B}$$

Exercice 2

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

1. $|z+2-3i|=2$
2. $|z+4+3i|=|z-3-4i|$
3. $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right|=1$
4. $|z+2-3i|=|\bar{z}+2i|$
5. $|(1-i)z-2i|=|(1+i)z-4-4i|$
6. $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right|=3$

Solution:

1) On pose $z_A=-2+3i$

$\Rightarrow |z-z_A|=2$, $M\in\Gamma \Leftrightarrow$

$AM=2 \Rightarrow \Gamma=\mathcal{C}(A,2)$

2) On pose $z_A=-4-3i$,

$z_B=3+4i$, $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow$

$|z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow$

$MA=MB$

$\Gamma_2=\text{med }[AB]$

3) $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right|=1 \Leftrightarrow$

$|z+2-3i|=|iz-1-i|$

$\Leftrightarrow |z+2-3i|=|i(z-\frac{1}{i}-1)|$

$\Leftrightarrow |z+2-3i|=|i|\,|z+i-1|$

$|z+2-3i|=|z-1+i|$

med $[AB]$ avec $A(-2,3)$

4) $z+2-3i=\bar{z}+2i$

$z+2-3i=\overline{z-2i}$

$\Rightarrow |z+2-3i|=|z-2i|$

On pose $z=x+iy$

$H(2i) \Rightarrow MA=MH \Rightarrow$

med $[AH]$ $|(x+2)+i(y-3)|=|x+i(-y+2)|$

$(x+2)^2+(y-3)^2=x^2+(-y+2)^2$

$x^2+y^2+4x-6y+13=x^2+y^2+4y+4$

$4x-6y+13=-4y+4$

$4x-2y+9=0$

5) $|(1-i)z-2i|=|(1+i)z-4-4i|$

$|(1-i)(z+1-i)|=|(1+i)(z-4)|$

$\cancel{\sqrt{2}}\,|z+1-i|=\cancel{\sqrt{2}}\,|z-4|$

$\Rightarrow MD=MF \Rightarrow M\in\text{med }[DF]$

6) $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right|=3$

$K(-1-2i)$ $L(3i)$

$\frac{MK}{ML}=3 \Rightarrow \frac{MK^2}{ML^2}=9$

$\Rightarrow MK^2-9ML^2=0$

$(\vec{MK}+3\vec{ML})(\vec{MK}-3\vec{ML})=0$

$P=\text{bar}\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline 1 & 3\end{array}$

$\varphi=\text{bar}\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline 1 & -3\end{array}$

$4\vec{MP}\;-\vec{M\varphi}=0$

$-8\,(\vec{MP}.\vec{M\varphi})=0 \Rightarrow$

$M\in\mathcal{C}([P\varphi])$.

D

Exercice 20 Bac

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes.

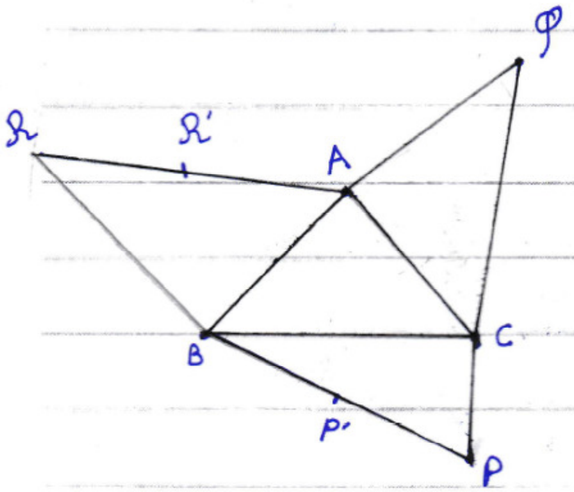
2.a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de a, b et c puis en déduire que les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G d'affixe g.

3. Exprimer chacun des complexes p, q et r en fonction de a, b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Solution :

1) figure :



2.a) P'CB est rectangle isocèle en P : $\frac{b-p'}{c-p'} = i \Rightarrow$

$b - p' = i(c-p')$

$\Leftrightarrow b-p' = ic - ip' \Rightarrow p'(1-i) = b - ic$

$\Leftrightarrow \boxed{p' = \frac{b-ic}{1-i}}$

De même ;

$\boxed{q' = \frac{c-iq}{1-i}}$

et $\boxed{r' = \frac{a-ib}{1-i}}$

b) $p'+q'+r' = \frac{b-ic+c-ia+a-ib}{1-i}$

$= \frac{a+b+c-i(c+a+b)}{1-i}$

$= \frac{(a+b+c)(1-i)}{1-i} = \frac{(a+b+c)(1-i)}{1-i}$

$= a+b+c$

Donc : $\boxed{p'+q'+r' = a+b+c}$

$\frac{p'+q'+r'}{3} = \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow$ ABC et PQR ont le même centre de gravité G d'affixe $g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{p'+q'+r'}{3}$

3) ACQ, ABR et CBP sont rectangle isocèle en A, B et P

$\frac{q-a}{c-a} = i$ $\frac{r-b}{a-b} = i$ $\frac{p-c}{b-c} = i \Rightarrow \begin{cases} p = c+ib-ci \\ q = a+ic-iq \\ r = b+ia-ib \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{p+q+r = a+b+c}$

$\frac{p+q+r}{3} = \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow$ ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

R

Exercice 17

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (a + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i, \qquad a \in \mathbb{C}$$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a = 1 - \frac{1}{2}i$ b) $a = 2 - \frac{1}{2}i$ c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a = \frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in \mathbb{R}$ et on note $\theta = \arg(a + \frac{1}{2}i)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 4|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : et $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

e) Pour $a = \frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2. Calculer S_n et $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ puis interpréter géométriquement.

Solution d'exercice 17:

1)

a) $a = 1 - \frac{1}{2}i \Rightarrow z' = z$.

Identité du plan.

b) $a = 2 - \frac{1}{2}i \Rightarrow z' = 2z - 4$.

homothetie de rapport $k=2$ de Centre $\Omega(4)$

c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z + 4 - 2\sqrt{3} - 2i$.

rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ de Centre $\Omega\left(\frac{4 - 2\sqrt{3} - 2i}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}\right) =$

$$4\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}\right) = 4.$$

d) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + z - 2i$.

Similitude direct de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$, et de Centre $\Omega(4)$.

2) $M_0(3,0)$; $\Omega(4,0)$

$M_{n+1} = f_a(M_n)$.

$\theta = \arg\left(a + \frac{1}{2}i\right)$

a) $z_1 = f_a(z_0) = 3\left(a + \frac{1}{2}i\right) + 4 - 4a - 2i$

$= 4 - a - \frac{1}{2}i$.

$z_2 = f_a(z_1) = \left(a + \frac{1}{2}i\right)\left(4 - a - \frac{1}{2}i\right) + 4 - 4a - 2i$.

$= \cancel{4a} - a^2 - \frac{1}{2}ai + \cancel{2i} - \frac{1}{2}ai + \frac{1}{4} + 4 - \cancel{4a} - \cancel{2i}$.

$= \frac{17}{4} - a^2 - ai$.

b) $z_1 = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^1$.

$z_2 = 4 \left(a + \frac{1}{2}i\right)^2$.

Suppons que : $z_n = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^n$.

Calculons z_{n+1}

$z_{n+1} = \left(a + \frac{1}{2}i\right) z_n + 4 - 4a - 2i$.

$= 4\left(a + \frac{1}{2}i\right) - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^{n+1}$.

$4 - 4a - 2i = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^{n+1}$.

$\Rightarrow \boxed{z_n = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$ $\boxed{2}$

c) $V_n = |Z_n - 4| = \left|a + \frac{1}{2}i\right|^n = \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \cdot e^{i\theta}\right|^n =$

$\left|\left(\sqrt{a \quad \frac{1}{4}}\right)^n \cdot e^{in\theta}\right| = \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)^n.$

V_n est une suite géometrique de premier terme

$|Z_0 - 4| = |-1| = 1.$

et de raison $q = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$ pour que $(V_n)_n$ Converge

il faut que. $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leqslant 1.$

$a^2 + \frac{1}{4} \leqslant 1.$

$a^2 \leqslant \frac{3}{4}.$

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant a \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}.$

$\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$

d). $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k, \quad d_n = M_n M_{n+1}$

$d_n = |Z_n + 1 - Z_n| = \left|\left(a + \frac{1}{2}i\right)^n - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^{n+1}\right| =$

$= \left|\left(a + \frac{1}{2}i\right)^n \left(1 - a - \frac{1}{2}i\right)\right| = \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}i}\right)^n \cdot \left(\sqrt{a^2 - 2a + \frac{5}{4}}\right)$

$v_n \cdot \sqrt{a^2 - 2a + \frac{5}{4}}.$

$S_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n.$

$= \sqrt{a^2 - 2n + \frac{5}{4}}\,[V_0 + V_1 + \cdots + V_n].$

$\Rightarrow \quad S_n = \sqrt{a^2 - 2n + \frac{5}{4}} \left(\frac{1 - \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1 - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}}\right).$

$\boxed{3}$

e°) Pour $a = \frac{1}{2}$.

$$\arg\left(\frac{z_{n+1} - \Omega}{z_n - \Omega}\right) = \arg\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n}}\right).$$

$$= \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} \; [2\pi].$$

$$\arg\left(\frac{\Omega - z_n}{z_{n+1} - z_n}\right) = \arg\left(\frac{\cancel{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n+1}}}{\cancel{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)}\right)$$

$$= \arg e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \; [2\pi].$$

$\Rightarrow \Omega M_n M_{n+1}$ est rectangle isocèle en M_{n+1}.

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 + \sqrt{2}.}$$

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes:

1) $\begin{cases} C_n = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx \\ S_n = \sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx \end{cases}$; (On pourra calculer C_n+iS_n)

2) $C_n = \cos^2 x+\cos^2 x\cos 2x+\cdots+\cos^n x\cos nx$

$S_n = \cos x\sin x+\cos^2 x\sin 2x+\cdots+\cos^n x\sin nx$; (On pourra calculer C_n+iS_n)

Solution d'exercice 11 :

1) $C_n+iS_n = 1+(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\dots+(\cos nx+i\sin nx) = 1+e^{ix}+e^{i2x}+\dots+e^{inx}$

$C_n+iS_n = 1+e^{ix}+(e^{ix})^2+\dots(e^{ix})^n$ c'est $\sum_{K=1}^{n} e^{ix}$ de raison $q=e^{ix}$ et de prèmier terme 1.

si $q=1 \iff e^{ix}=1 \iff x=0\ [2\pi]$.

$\begin{cases} C_n = 1+\cos 0+\dots\dots+\cos 0 = n+1 \\ S_n = 0+0+\dots\dots+0=0 \end{cases} \iff$

$$\boxed{C_n+iS_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}}$$

$$C_n+iS_n = \frac{e^{i(n+1)x}-e^{i0}}{e^{ix}-e^{i0}} = \frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)e^{i\left(\frac{n+1}{2}x\right)}}{2i\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\cdot e^{i\left(\frac{n}{2}x\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)+\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right)$$

$$\boxed{C_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}}$$

A **Exercice 5**

Déterminer suivant les valeurs de θ $(\theta \in [0;2\pi[)$ le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$, $z_2 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = 1+\sin\theta - i\cos\theta$, $z_4 = 1 + i\tan\theta$,

$z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$, $z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

Solution exo 5:

$Z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta) = \cos\theta + i + i\sin\theta$
$= e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

Etudions le signe de $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

* $k=0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi[$
* $k=1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \notin [0, 2\pi[$
* $k=-1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{-\pi}{2} \notin [0, 2\pi[$

θ	0		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	

* Si $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

D'où: $\begin{cases} |z_1| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \arg(z_1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

* $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ alors $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

D'où $\begin{cases} |z_1| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \arg(z_1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi\ [2\pi] \end{cases}$

* Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

D'où $z_1 = 0 \Rightarrow |z_1| = 0$ et z_1 n'a pas d'argument

2) $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} + e^{i0} =$
$2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$, $|z_2| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$[\theta \in]-\pi, \pi[$, $\arg(z_2) = \frac{\theta}{2}$

$z_3 = 1 + \sin\theta - i\cos\theta = 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= 1 - i e^{i\theta} = 1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$
$= 2\cos\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

Si $2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ alors $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi[$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{\theta}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\lvert z \rvert$	$2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$			0	$-2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
arg	$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$			$\Vert$	$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi$

Conclusion:

Si $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$, $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
et $\arg z = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$

Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $|z| = 0$, pas d'argument

Si $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ et
$\arg z = \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}$

$z_4 = 1 + i\tan\theta = 1 + \frac{i\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$

$z_4 = \frac{1}{\cos\theta} \cdot e^{i\theta}$

$\boxed{1}$ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, $\cos\theta > 0$

$\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $\cos\theta < 0$

$\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $\cos\theta = 0$

θ	0 $\quad \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\quad 2\pi$
$\frac{1}{\cos\theta}$	$+$	$-$	$+$
$\|z\|$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\frac{-1}{\cos\theta}$	$\frac{1}{\cos\theta}$
$\arg z$	θ	$\pi+\theta$	θ

$$z_5 = \frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})} =$$

$$\frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}+1}$$

Conclusion :

$\theta = \pi$, z n'existe pas

$\theta \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$; $z = e^{i\theta}$

donc $|z| = 1$, $\arg z = \theta$.

$$z_6 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} ; \ \theta \notin \{\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\}$$

$$= \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \Rightarrow$$

$$z_6 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$$

* Si $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, z_6 = n'existe pas.

* Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ alors $|z| = 1$ et $\boxed{\arg z = 2\theta}$

2